

PRAVOUGAONI PRESEK - ČISTO SAVIJANJE

VEZANO DIMENZIONISANJE

- Poznato:
- statički uticaji za pojedina opterećenja (M_i) - sračunato
 - kvalitet materijala (f_B , σ_v) - usvojeno
 - dimenzije poprečnog preseka (b , d)

Nepoznato: - površina armature (A_a)

1. korak: Sračunavaju se granični računski statički uticaji:

$$M_u = \sum_i \gamma_{u,i} \times M_i \quad (i = g, p, \Delta)$$

Pri tome se usvajaju MINIMALNE vrednosti koeficijenata sigurnosti.

2. korak: Pretpostavlja se položaj težišta zategnute armature a_1 i na osnovu toga sračunava statička visina:

$$h = d - a_1$$

Veličina a_1 se pretpostavlja zavisno od visine i širine preseka (broj šipki koje se mogu smestiti u jedan red). Kreće se u granicama $(0.05-0.15) \times d$.

3. korak: Sračunava se koeficijent k :

$$k = \frac{h}{\sqrt{\frac{M_u}{b \times f_B}}}$$

i iz tabela za dimenzionisanje pročitaju vrednosti dilatacija betona i armature i mehanički koeficijent armiranja $\bar{\mu}$ ili bezdimenzioni koeficijent kraka unutrašnjih sila ζ .
Ukoliko je $\epsilon_{a1} \geq 3\text{‰}$, sračunava se potrebna površina armature iz izraza:

$$A_a = \bar{\mu} \times \frac{b \times h}{100} \times \frac{f_B}{\sigma_v} \quad \text{ili}$$

$$A_a = \frac{M_u}{z \times \sigma_v} = \frac{M_u}{\zeta \times h \times \sigma_v}$$

Ukoliko je $\epsilon_a < 3\text{‰}$, presek se DVOSTRUKO ARMIRA.

4. korak: Usvaja se broj i prečnik šipki armature. Usvojena armatura se raspoređuje u poprečnom preseku, vodeći računa o zahtevima propisanih Pravilnikom (debljina zaštitnog sloja, čisto rastojanje između šipki).

5. korak: Sračunava se položaj težišta a_1 usvojene armature u odnosu na zategnutu ivicu preseka i statička visina h i upoređuje sa pretpostavljenom. U slučaju znatnijih odstupanja, proračun se ponavlja sa korigovanom vrednošću a_1 .
6. korak: Konačno se konstruiše poprečni presek usvojenih dimenzija, armiran usvojenom količinom armature, i prikazuje u odgovarajućoj razmeri (1:10) sa svim potrebnim kotama i oznakama.

Primer 1. Odrediti potrebnu površinu armature za presek poznatih dimenzija, pravougaonog oblika, opterećen momentima savijanja usled stalnog (M_g) i povremenog (M_p) opterećenja. Podaci za proračun:

$$M_g = 200 \text{ kNm}$$

$$b = 35 \text{ cm}$$

$$\text{MB 30}$$

$$M_p = 250 \text{ kNm}$$

$$d = 70 \text{ cm}$$

$$\text{RA 400/500}$$

$$M_u = 1.6 \times 200 + 1.8 \times 250 = 770 \text{ kNm}$$

$$\text{MB 30} \Rightarrow f_B = 2.05 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{RA 400/500} \Rightarrow \sigma_v = 40 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{pretp. } a_1 = 7 \text{ cm} \Rightarrow h = 70 - 7 = 63 \text{ cm}$$

$$k = \frac{63}{\sqrt{\frac{770 \times 10^2}{35 \times 2.05}}} = 1.923$$

$$\epsilon_b = 3.5\text{‰} ; \alpha_b = 0.810 ; \eta = 0.416$$

ϵ_a	s	ζ	$\mu_{IM} \%$	k
5.3	0.398	0.835	32.197	1.929
5.25	0.400	0.834	32.381	1.925
5.2	0.402	0.833	32.567	1.920

$$\epsilon_b / \epsilon_a = 3.5 / 5.25\text{‰}, \quad \bar{\mu} = 32.381\%$$

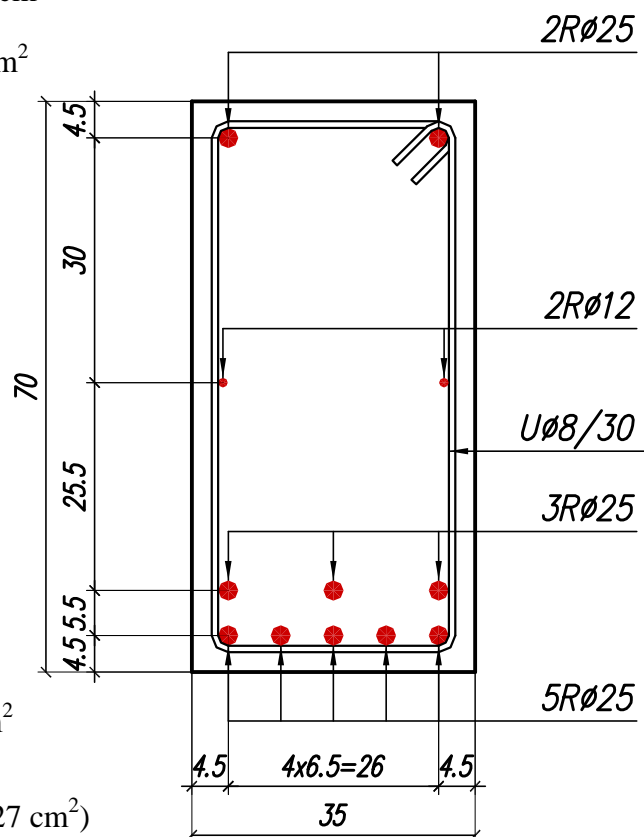
$$A_a = 32.381 \times \frac{35 \times 63}{100} \times \frac{2.05}{40} = 36.59 \text{ cm}^2$$

$$\text{usvojeno: } \mathbf{8 R\O25} \text{ (39.27 cm}^2\text{)}$$

$$a^I = a_0 + \O_u + \O/2 = 2.5 + 0.8 + 2.5/2 = 4.55 \text{ cm} \approx 4.5 \text{ cm}$$

$$a^{II} = a^I + 2 \times \O/2 + e_v = 4.5 + 2 \times 2.5/2 + 3 = 10 \text{ cm}$$

$$a_1 = \frac{5 \times 4.5 + 3 \times 10}{8} = 6.6 \text{ cm} \Rightarrow h_{\text{stv.}} = 70 - 6.6 = 63.4 \text{ cm} > 63 \text{ cm} = h_{\text{pretp.}}$$



DVOSTRUKO ARMIRANI PRESECI

Ukoliko se u slučaju vezanog dimenzionisanja dobije $\epsilon_a < 3\%$, presek se DVOSTRUKO ARMIRA, odnosno određuje i armatura koja se raspoređuje u pritisnutu zonu preseka. Time se dilatacija zategnute armature zadržava na željenom nivou ($\epsilon_a \geq 3\%$), pa se pri proračunu graničnih računskih statičkih uticaja koriste minimalne vrednosti koeficijenata sigurnosti.

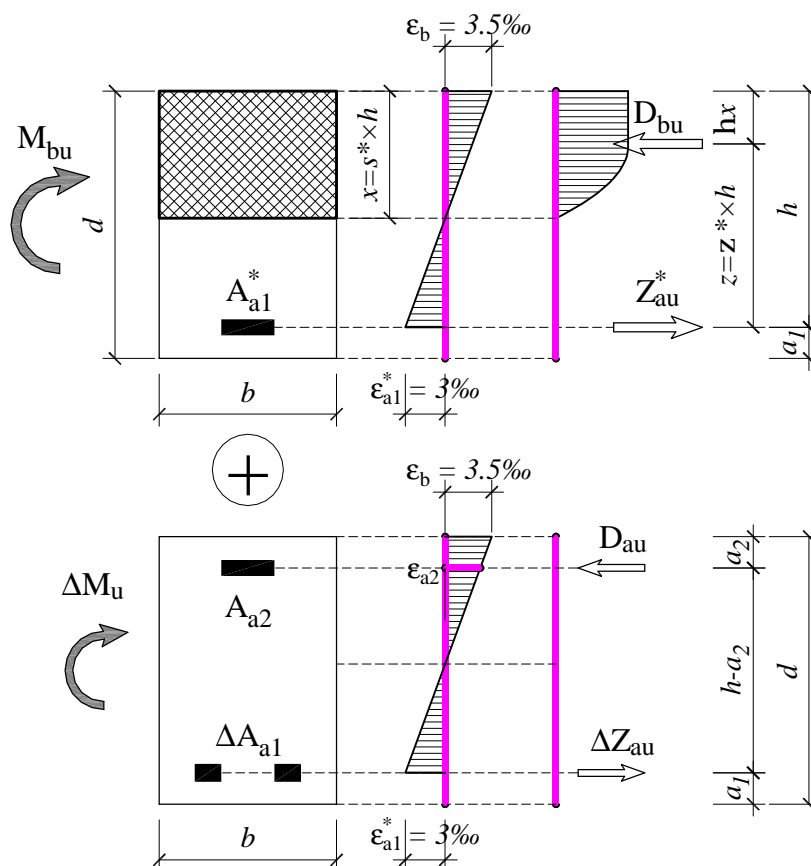
3a. korak: Određuje se moment nosivosti JEDNOSTRUKO armiranog preseka, sa procentom armiranja μ^* i koeficijentom k^* koji odgovaraju dilataciji armature koja se želi zadržati (najčešće $\epsilon_{a1} = 3\%$)¹:

$$M_{bu} = \left(\frac{h}{k^*} \right)^2 \times b \times f_B$$

Preostali deo spoljašnjeg momenta savijanja:

$$\Delta \mathbf{M}_{ij} = \mathbf{M}_{ij} - \mathbf{M}_{b_{ij}}$$

se prihvata dodatnom zategnutom i ukupnom pritisnutom armaturom.



¹ U računskom smislu, dvostruko armirani preseći se mogu dobiti i kada je dilatacija zategnute armature $\varepsilon_{a1} > 3\%$, ukoliko se iz bilo kog razloga želi sprečiti da njena vrednost padne ispod određene granice. Ta proizvoljno određena (ili zadatkom utvrđena) granica postaje vrednost ε_{a1}^* iz napred navedenih izraza.

Iz napred navedenog treba zaključiti da prisustvo armature smeštene uz pritisnutu ivicu preseka ne znači nužno i da je dilatacija zategnute armature $\epsilon_{s1} = 3\%$.

4. korak: Pretpostavlja se položaj težišta pritisnute armature a_2 i određuju se površine zategnute i pritisnute armature u preseku, iz izraza:

$$A_{a2} = \frac{\Delta M_u}{(h - a_2) \times \sigma_v}$$

$$A_{a1} = \bar{\mu}^* \times \frac{b \times h}{100} \times \frac{f_B}{\sigma_v} + A_{a2} \quad \text{ili} \quad A_{a1} = \frac{M_{bu}}{\zeta^* \times h \times \sigma_v} + A_{a2}$$

Ostali elementi proračuna se sprovode potpuno isto kao za jednostruko armiran presek. Vrednosti $\bar{\mu}^*$, ζ^* i k^* odgovaraju usvojenoj dilataciji ϵ_{a1}^* .

Primer 2. Odrediti potrebnu površinu armature za presek iz Primera 1., pod uslovom da je širina preseka $b = 20$ cm.

pretp. $a_1 = 7$ cm $\Rightarrow h = 70 - 7 = 63$ cm

$$k = \frac{63}{\sqrt{\frac{770 \times 10^2}{20 \times 2.05}}} = 1.454 \Rightarrow \epsilon_a = 0\text{‰} < 3\text{‰} \Rightarrow \text{dvostruko armiranje}$$

$$\epsilon_b = 3.5\text{‰} ; \alpha_b = 0.810 ; \eta = 0.416$$

ϵ_a	s	ζ	$\mu_{IM} \%$	k
0.05	0.986	0.590	79.812	1.457
0	1.000	0.584	80.952	1.454
-0.05	1.014	0.578	82.126	1.451

usvojeno $\epsilon_{a1}^* = 3\text{‰} \Rightarrow k^* = 1.719, \bar{\mu}^* = 43.590\%$

$$M_{bu} = \left(\frac{63}{1.719} \right)^2 \times 20 \times 2.05 = 55050 \text{ kNcm} = 550.5 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_u = 770 - 550.5 = 219.5 \text{ kNm}$$

pretp. $a_2 = 5$ cm $\Rightarrow A_{a2} = \frac{219.5 \times 10^2}{(63 - 5) \times 40} = 9.46 \text{ cm}^2$

usvojeno: **2 RØ25** (9.82 cm^2)

$$A_{a1} = 43.590 \times \frac{20 \times 63}{100} \times \frac{2.05}{40} + 9.46 = 37.61 \text{ cm}^2$$

usvojeno: **8 RØ25** (39.27 cm^2)

$$a_1 = \frac{3 \times 4.5 + 3 \times 10 + 2 \times 15.5}{8} = 9.3 \text{ cm} \Rightarrow h_{stv.} = 70 - 9.3 = 60.7 \text{ cm} < 63 \text{ cm} = h_{pretp.}$$

Potrebna armatura se ne može rasporediti tako da se dobije pretpostavljena vrednost statičke visine, pa je potrebno izvršiti korekciju proračuna. Kako će se smanjenjem statičke visine dobiti veća potrebna površina armature, vrednost a_1 sigurno neće biti manja od upravo sračunatih 9.3 cm. Sledi:

$$\text{pretp. } a_1 = 10 \text{ cm} \Rightarrow h = 70 - 10 = 60 \text{ cm}$$

$$k = \frac{60}{\sqrt{\frac{770 \times 10^2}{20 \times 2.05}}} = 1.385 \Rightarrow \epsilon_a < 3\text{‰} \Rightarrow \text{dvostruko armiranje}$$

$$\epsilon_b = 3.5\text{‰} ; \alpha_b = 0.810 ; \eta = 0.416$$

ϵ_a	s	ζ	$\mu_{IM} \%$	k
-0.4	1.129	0.530	91.398	1.436
-0.45	1.148	0.523	92.896	1.435

Tražene vrednosti k u tablicama nema, ali nije ni potrebna za proračun, jer je dilatacija zategnute armature manja od minimalno zahtevanih 3‰. Sledi:

$$\text{usv. } \epsilon_{a1}^* = 3\text{‰} \Rightarrow k^* = 1.719, \bar{\mu}^* = 43.590\%$$

$$M_{bu} = \left(\frac{60}{1.719} \right)^2 \times 20 \times 2.05 \times 10^{-2} = 499.3 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_u = 770 - 499.3 = 270.7 \text{ kNm}$$

$$\text{pp. } a_2 = 5 \text{ cm} \Rightarrow A_{a2} = \frac{270.7 \times 10^2}{(60 - 5) \times 40} = 12.31 \text{ cm}^2$$

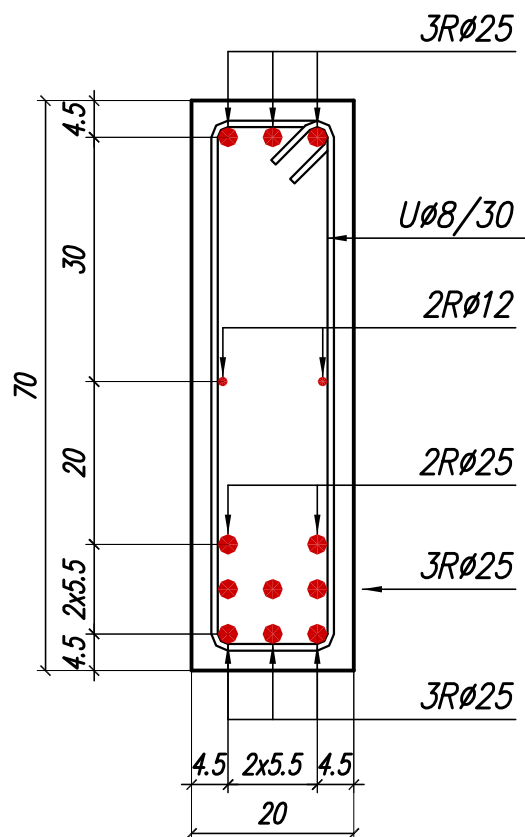
$$\text{usvojeno: } \mathbf{3 R\emptyset 25} \text{ (14.73 cm}^2\text{)}$$

$$A_{a1} = 43.590 \times \frac{20 \times 60}{100} \times \frac{2.05}{40} + 12.31 = 39.11 \text{ cm}^2$$

$$\text{usvojeno: } \mathbf{8 R\emptyset 25} \text{ (39.27 cm}^2\text{)}$$

$$a_1 = \frac{3 \times 4.5 + 3 \times 10 + 2 \times 15.5}{8} = 9.3 \text{ cm}$$

$$h_{stv.} = 70 - 9.3 = 60.7 \text{ cm} > 60 \text{ cm} = h_{pretp.}$$



Upoređivanjem rezultata proračuna iz primera 1 i 2, moguće je uočiti da smanjenje širine preseka MALO povećava potrebnu površinu ZATEGNUTE armature. U konkretnom primeru, ta razlika je 6.9% i izazvana je:

- smanjenjem kraka unutrašnjih sila (smanjenje veličine z iz tablica)
- smanjenjem statičke visine usled manjeg broja šipki armature koje je moguće smestiti u jedan horizontalni red.

PRAVOUGAONI PRESEK - ČISTO SAVIJANJE

SLOBODNO DIMENZIONISANJE

Poznato: - statički uticaji za pojedina opterećenja (M_i) - sračunato

- kvalitet materijala (f_B , σ_v) - usvojeno

- širina poprečnog preseka (b) - usvojeno

Nepoznato: - visina poprečnog preseka (d)

- površina armature (A_a)

1. korak: Sračunavaju se granični računski statički uticaji:

$$M_u = \sum_i \gamma_{u,i} \times M_i \quad (i=g, p, \Delta)$$

Pri tome se usvajaju MINIMALNE vrednosti koeficijenata sigurnosti, jer se redovno usvaja dilatacija zategnute armature $\epsilon_a \geq 3\text{‰}$.

2. korak: Usvajaju se dilatacije betona ϵ_b i armature ϵ_a , pri čemu bar jedna mora dostići graničnu vrednost. Veće dilatacije betona daju preseke manje visine, armirane većom količinom armature. Za usvojene vrednosti dilatacija iz tabela za dimenzionisanje očitavaju se koeficijenti k i $\bar{\mu}$, odnosno ζ .

3. korak: Sračunavaju se potrebna statička visina iz izraza:

$$h = k \sqrt{\frac{M_u}{b \times f_B}} \quad (1)$$

i površina armature iz jednog od sledećih izraza:

$$A_a = \bar{\mu} \times \frac{b \times h}{100} \times \frac{f_B}{\sigma_v} \quad \text{ili} \quad (2)$$

$$A_a = \frac{M_u}{z \times \sigma_v} = \frac{M_u}{\zeta \times h \times \sigma_v} \quad (3)$$

4. korak: Usvaja se broj i prečnik šipki armature. Usvojena armatura se raspoređuje u poprečnom preseku, vodeći računa o zahtevima propisanih Pravilnikom (debljina zaštitnog sloja, čisto rastojanje između šipki).

5. korak: Sračunava se položaj težišta a_1 usvojene armature u odnosu na zategnutu ivicu preseka i potrebna ukupna visina preseka d :

$$d = h + a_1$$

koja se zaokružuje na prvi veći ceo broj (ceo broj deljiv sa pet).

6. korak: Konačno se konstruiše poprečni presek usvojenih dimenzija, armiran usvojenom količinom armature, i prikazuje u odgovarajućoj razmeri (1:10) sa svim potrebnim kotama i oznakama.

Primer 3. Odrediti visinu i potrebnu površinu armature za presek pravougaonog oblika, opterećen momentima savijanja usled stalnog (M_g) i povremenog (M_p) opterećenja. Podaci za proračun:

$$M_g = 60 \text{ kNm} \quad b = 25 \text{ cm} \quad \text{MB 30}$$

$$M_p = 80 \text{ kNm} \quad \text{GA 240/360}$$

$$M_u = 1.6 \times 60 + 1.8 \times 80 = 240 \text{ kNm}$$

$$\text{MB 30} \Rightarrow f_B = 2.05 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{GA 240/360} \Rightarrow \sigma_v = 24 \text{ kN/cm}^2$$

U cilju poređivanja rezultata proračuna, primer će, sa gornjim podacima, biti urađen u tri varijante (lom po armaturi, simultani lom, lom po betonu).

1. varijanta: LOM PO ARMATURI

usvojeno $\epsilon_b/\epsilon_a = 2.0/10\text{‰}$

LOM PO ARMATURI ($\epsilon_a = 10\text{‰}$)

ϵ_b	s	α_b	η	ζ	$\mu_{IM} \%$	k
2.025	0.168	0.671	0.376	0.937	11.296	3.074
2	0.167	0.667	0.375	0.938	11.111	3.098
1.975	0.165	0.662	0.374	0.938	10.926	3.123

$$k = 3.098, \bar{\mu} = 11.111\%, \zeta = 0.938$$

$$h = 3.098 \times \sqrt{\frac{240 \times 10^2}{25 \times 2.05}} = 67.0 \text{ cm}$$

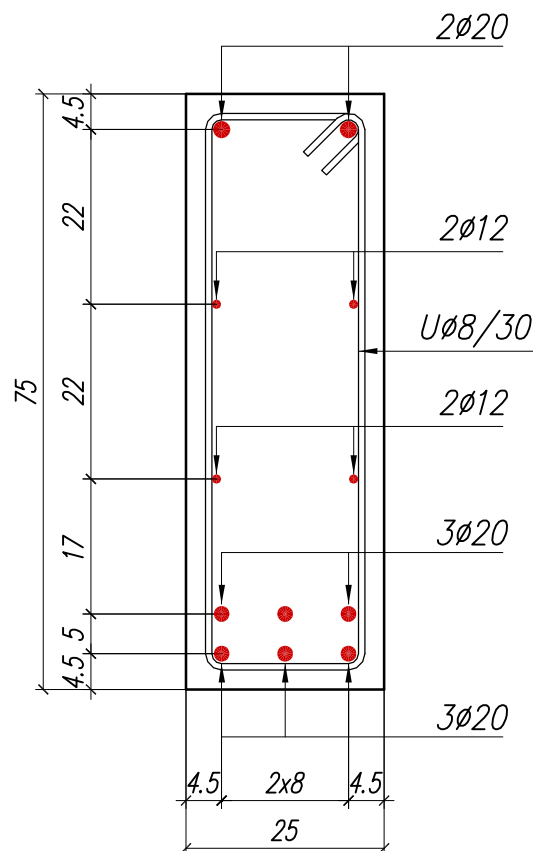
$$A_a = 11.111 \times \frac{25 \times 67.0}{100} \times \frac{2.05}{24} = 15.91 \text{ cm}^2$$

$$A_a = \frac{240 \times 10^2}{0.938 \times 67.0 \times 24} = 15.92 \text{ cm}^2$$

usvojeno: **6Ø20** (18.85 cm²)

$$a_1 = \frac{3 \times (4.5 + 9.5)}{6} = 7.0 \text{ cm} \Rightarrow d = 67.0 + 7.0 = 74.0 \text{ cm}$$

usvojeno: **d=75 cm**



2. varijanta: SIMULTANI LOM

usvojeno $\varepsilon_b/\varepsilon_a = 3.5/10\text{‰} \Rightarrow k = 2.311$, $\bar{\mu} = 20.988\%$

$$h = 2.311 \times \sqrt{\frac{240 \times 10^2}{25 \times 2.05}} = 50.0 \text{ cm}$$

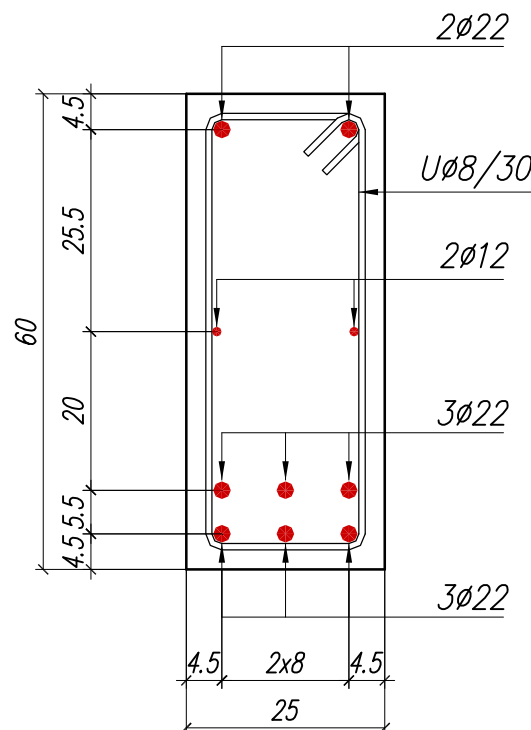
$$A_a = 20.988 \times \frac{25 \times 50.0}{100} \times \frac{2.05}{24} = 22.41 \text{ cm}^2$$

usvojeno: **6Ø22** (22.81 cm²)

$$a_1 = \frac{3 \times (4.5 + 10)}{6} = 7.25 \text{ cm}$$

$$d = 50.0 + 7.25 = 57.25 \text{ cm}$$

usvojeno: **d=60 cm**

**3. varijanta: LOM PO BETONU**

usvojeno $\varepsilon_b/\varepsilon_a = 3.5/5.0\text{‰} \Rightarrow k = 1.903$, $\bar{\mu} = 33.333\%$

$$h = 1.903 \times \sqrt{\frac{240 \times 10^2}{25 \times 2.05}} = 41.2 \text{ cm}$$

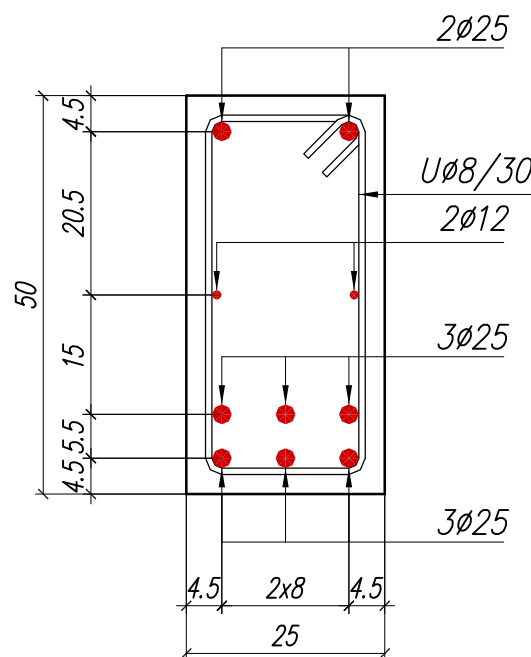
$$A_a = 33.333 \times \frac{25 \times 41.2}{100} \times \frac{2.05}{24} = 29.31 \text{ cm}^2$$

usvojeno: **6Ø25** (29.45 cm²)

$$a_1 = \frac{3 \times (4.5 + 10)}{6} = 7.25 \text{ cm}$$

$$d = 41.2 + 7.3 = 48.5 \text{ cm}$$

usvojeno: **d=50 cm**



Iz izraza (3) je očito da je proizvod $A_a \times z = A_a \times z \times h$ konstantan. Kako se bezdimenzioni koeficijent z menja u vrlo uskim granicama, uglavnom uzimajući vrednosti (0.85-0.95), to praktično znači da potrebna površina armature gotovo linearno zavisi od usvojene visine preseka.

Usvajanjem manje dilatacije betona dobijaju se presezi veće visine, armirani manjom količinom armature. Sa smanjenjem dilatacije betona ima smisla ići do granice od cca. 1.5 do 2‰. Usvajanje manje dilatacije betona rezultira presecima vrlo velike visine, armiranih minimalnim količinama armature.

PRAVOUGAONI PRESEK - SLOŽENO SAVIJANJE

VEZANO DIMENZIONISANJE

Poznato: - statički uticaji za pojedina opterećenja (M_i, N_i)

- kvalitet materijala (f_B, σ_v)

- dimenzije poprečnog preseka (b, d)

Nepoznato: - površina armature (A_a)

1. korak: Sračunavaju se granični računski statički uticaji:

$$M_u = \sum_i \gamma_{u,i} \times M_i \quad (i=g, p, \Delta)$$

$$N_u = \sum_i \gamma_{u,i} \times N_i$$

Pritom se usvajaju MINIMALNE vrednosti koeficijenata sigurnosti.

2. korak: Usvajaju se dilatacije. Pretpostavlja se položaj težišta zategnute armature a_1 i na osnovu toga sračunavaju statička visina i moment oko težišta zategnute armature:

$$h = d - a_1 \Rightarrow M_{au} = M_u + N_u \times \left(\frac{d}{2} - a_1 \right)$$

Veličina a_1 se pretpostavlja zavisno od visine i širine preseka (broj šipki koje se mogu smestiti u jedan red), kao i intenziteta i znaka normalne sile (ekscentrično pritisnuti elementi zahtevaju manje zategnute armature, pa je i a_1 manje). Kreće se u granicama $(0.05 - 0.15) \times d$.

3. korak: Sračunava se koeficijent k :

$$k = \frac{h}{\sqrt{\frac{M_{au}}{b \times f_B}}}$$

i iz tablica za dimenzionisanje pročitaju vrednosti dilatacija u betonu i armaturi i mehanički koeficijent armiranja $\bar{\mu}$. Ukoliko je $\epsilon_{a1} \geq 3\text{‰}$, sračunava se potrebna površina armature iz izraza:

$$A_a = \bar{\mu} \times \frac{b \times h}{100} \times \frac{f_B}{\sigma_v} - \frac{N_u}{\sigma_v} \quad \text{ili}$$

$$A_a = \left(\frac{M_{au}}{z} - N_u \right) \times \frac{1}{\sigma_v} = \left(\frac{M_{au}}{\zeta \times h} - N_u \right) \times \frac{1}{\sigma_v}$$

Ukoliko je $\epsilon_{a1} < 3\text{‰}$, presek se DVOSTRUKO ARMIRA.

4. korak: Usvaja se broj i prečnik šipki armature. Usvojena armatura se raspoređuje u poprečnom preseku, vodeći računa o zahtevima propisanih Pravilnikom (debljina zaštitnog sloja, čisto rastojanje između šipki).
5. korak: Sračunava se položaj težišta a_1 usvojene armature u odnosu na zategnutu ivicu preseka i statička visina h i upoređuje sa pretpostavljenom. U slučaju znatnijih odstupanja, proračun se ponavlja sa korigovanom vrednošću a_1 .
6. korak: Konačno se konstruiše poprečni presek usvojenih dimenzija, armiran usvojenom količinom armature, i prikazuje u odgovarajućoj razmeri (1:10) sa svim potrebnim kotama i oznakama.

Izrazi za određivanje momenta M_{au} i potrebne površine armature A_a su napisani u obliku koji odgovara ekscentričnom pritisku; u slučaju da je presek ekscentrično zategnut, u izraze se unosi sila sa negativnim znakom.

Primer 4. Odrediti potrebnu površinu armature za pravougaoni presek poznatih dimenzija, opterećen graničnim momentom savijanja M_u i silom zatezanja Z_u . Podaci za proračun:

$$M_u = 770 \text{ kNm}$$

$$b = 35 \text{ cm}$$

$$MB 30$$

$$Z_u = 720 \text{ kN}$$

$$d = 70 \text{ cm}$$

$$RA 400/500$$

$$MB 30 \Rightarrow f_B = 2.05 \text{ kN/cm}^2 ; \quad RA 400/500 \Rightarrow \sigma_v = 40 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{pretp. } a_1 = 7 \text{ cm} \Rightarrow h = 70 - 7 = 63 \text{ cm}$$

$$M_{au} = 770 + (-720) \times \left(\frac{0.70}{2} - 0.07 \right) = 568.4 \text{ kNm}$$

$$k = \frac{63}{\sqrt{\frac{568.4 \times 10^2}{35 \times 2.05}}} = 2.238$$

$$\epsilon_b/\epsilon_a = 3.5/9.05\% , \quad \bar{\mu} = 22.576\% , \quad \zeta = 0.884$$

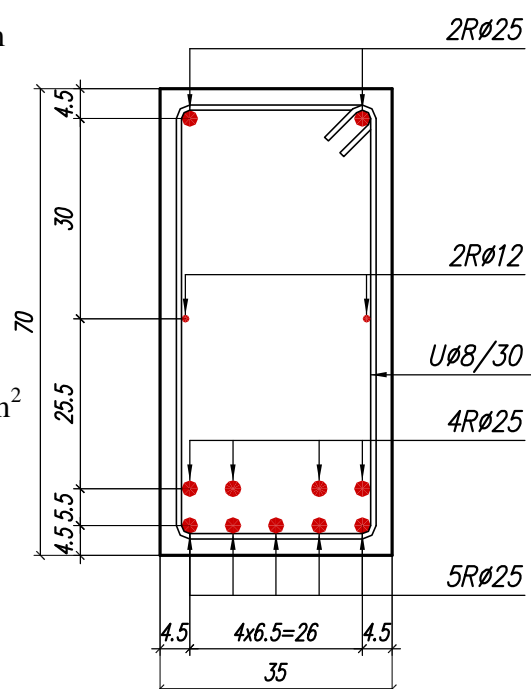
$$A_a = 22.576 \times \frac{35 \times 63}{100} \times \frac{2.05}{40} - \frac{(-720)}{40} = 43.51 \text{ cm}^2$$

$$\text{ili: } A_a = \left(\frac{568.4 \times 10^2}{0.884 \times 63} - (-720) \right) \times \frac{1}{40} = 43.52 \text{ cm}^2$$

$$\text{usvojeno: } \mathbf{9R\emptyset 25} \quad (44.18 \text{ cm}^2)$$

$$a_1 = \frac{5 \times 4.5 + 4 \times 10}{9} = 6.94 \text{ cm}$$

$$h_{stv.} = 70 - 6.94 = 63.06 \text{ cm} \approx 63 \text{ cm} = h_{pretp.}$$



Primer 5. Odrediti potrebnu površinu armature za presek iz Primera 4., ukoliko je, umesto silom zatezanja, opterećen graničnom silom pritiska $N_u = 720$ kN.

pretp. $a_1 = 6$ cm $\Rightarrow h = 70 - 6 = 64$ cm

$$M_{au} = 770 + 720 \times \left(\frac{0.70}{2} - 0.06 \right) = 978.8 \text{ kNm}$$

$$k = \frac{64}{\sqrt{\frac{978.8 \times 10^2}{35 \times 2.05}}} = 1.733$$

$$\epsilon_b/\epsilon_a = 3.5/3.15\% , \bar{\mu} = 42.607\% , \zeta = 0.781$$

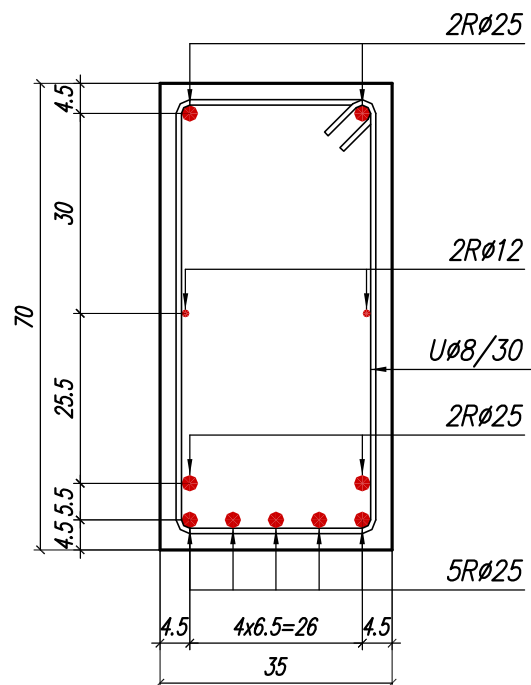
$$A_a = 42.607 \times \frac{35 \times 64}{100} \times \frac{2.05}{40} - \frac{720}{40} = 30.91 \text{ cm}^2$$

ili:
$$A_a = \left(\frac{978.8 \times 10^2}{0.781 \times 64} - 720 \right) \times \frac{1}{40} = 30.95 \text{ cm}^2$$

usvojeno: **7RØ25** (34.36 cm²)

$$a_1 = \frac{5 \times 4.5 + 2 \times 10}{7} = 6.07 \text{ cm}$$

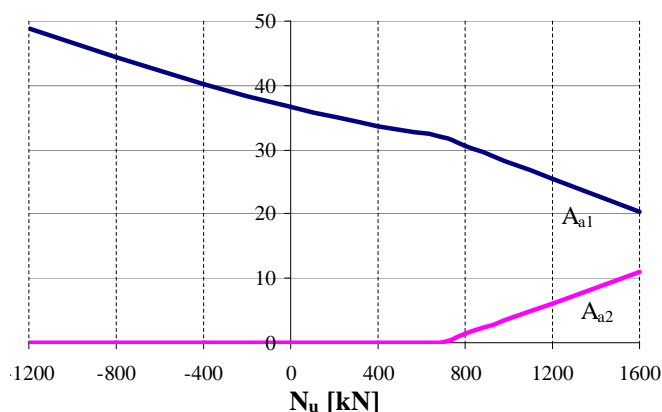
$$h_{stv.} = 70 - 6.07 = 63.93 \text{ cm} \approx 64 \text{ cm} = h_{pretp.}$$



U primerima 1, 4 i 5 dimenzionisan je poprečni presek istih dimenzija i kvaliteta materijala, u sva tri slučaja opterećen istim momentom savijanja. Jedini parametar koji je variran je normalna sila.

*Upoređujući sračunate vrednosti, uočava se da se najveća potrebna površina **zategnute** armature dobija u preseku napregnutom momentom savijanja i silom **zatezanja**, a najmanja kada pri istom momentu savijanja deluje i sila pritiska. Drugim rečima, pri istim dimenzijama preseka i istim vrednostima momenata savijanja,*

*potrebno je, kao merodavnu, odabrati kombinaciju uticaja koja daje **maksimalno moguću silu zatezanja** (odnosno, minimalno moguću silu pritiska).*



*Analogno, pri istim dimenzijama preseka i istim vrednostima momenata savijanja, merodavna kombinacija uticaja za eventualnu PRITISNUTU armaturu (dvostruko armirani preseci) je ona koja **daje maksimalno moguću silu pritiska** (odnosno, minimalno moguću silu zatezanja).*

4. korak: Pretpostavlja se položaj težišta pritisnute armature a_2 i određuju se površine zategnute i pritisnute armature u preseku, iz izraza:

$$A_{a2} = \frac{\Delta M_{au}}{(h - a_2) \times \sigma_v}$$

$$A_{a1} = \bar{\mu}^* \times \frac{b \times h}{100} \times \frac{f_B}{\sigma_v} - \frac{N_u}{\sigma_v} + A_{a2}$$

Ostali elementi proračuna se sprovode potpuno isto kao u slučaju jednostruko armiranog preseka. Napominje se da su vrednosti k^* i $\bar{\mu}^*$ određene usvajanjem dilatacije ϵ_{a1}^* .

Primer 6. Odrediti potrebnu površinu armature za presek poznatih dimenzija, pravougaonog oblika, opterećen momentom savijanja M_g i silom pritiska N_g . Podaci za proračun:

$$M_g = 360 \text{ kNm}$$

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$\text{MB 30}$$

$$N_g = 600 \text{ kN}$$

$$d = 60 \text{ cm}$$

$$\text{RA 400/500}$$

$$M_u = 1.6 \times 360 = 576 \text{ kNm} \quad ; \quad N_u = 1.6 \times 600 = 960 \text{ kN}$$

$$\text{pretp. } a_1 = 7 \text{ cm} \Rightarrow h = 60 - 7 = 53 \text{ cm}$$

$$M_{au} = 576 + 960 \times \left(\frac{0.60}{2} - 0.07 \right) = 796.8 \text{ kNm}$$

$$k = \frac{53}{\sqrt{\frac{796.8 \times 10^2}{30 \times 2.05}}} = 1.472 \Rightarrow \epsilon_a < 3\text{‰} \Rightarrow \text{dvostruko armiranje}$$

$$\text{usv. } \epsilon_{a1}^* = 3.0\text{‰} \Rightarrow k^* = 1.719 \quad ; \quad \bar{\mu}^* = 43.590\%$$

$$M_{abu} = \left(\frac{53}{1.719} \right)^2 \times 30 \times 2.05 \times 10^{-2} = 584.4 \text{ kNm}$$

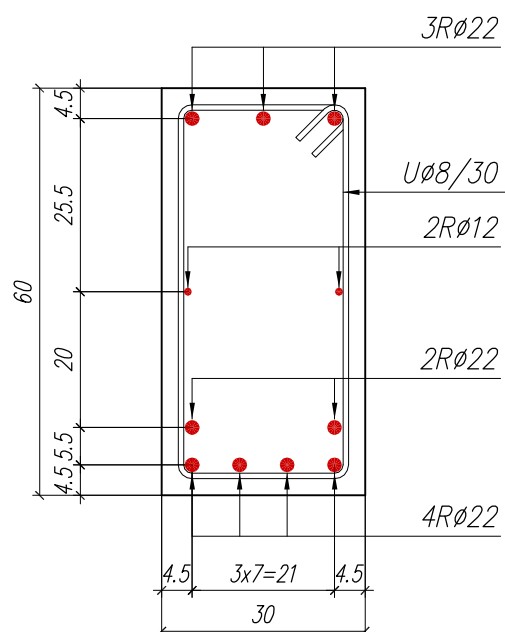
$$\Delta M_{au} = 796.8 - 584.4 = 212.4 \text{ kNm}$$

$$\text{pretp. } a_2 = 5 \text{ cm} \Rightarrow A_{a2} = \frac{212.4 \times 10^2}{(53 - 5) \times 40} = 11.06 \text{ cm}^2$$

$$\text{usvojeno: } \quad \mathbf{3 \text{ R}\varnothing 22 \text{ (11.40 cm}^2\text{)}}$$

$$A_{a1} = 43.590 \times \frac{30 \times 53}{100} \times \frac{2.05}{40} - \frac{960}{40} + 11.06 = 22.58 \text{ cm}^2$$

$$\text{usvojeno: } \quad \mathbf{6 \text{ R}\varnothing 22 \text{ (22.81 cm}^2\text{)}}$$



Ukoliko bi usvojili nešto veću dilataciju zategnute armature ϵ_{a1}^* , sledi:

$$\text{usv. } \epsilon_{a1}^* = 6.0\text{‰} \Rightarrow k^* = 1.990 ; \bar{\mu}^* = 29.825\%$$

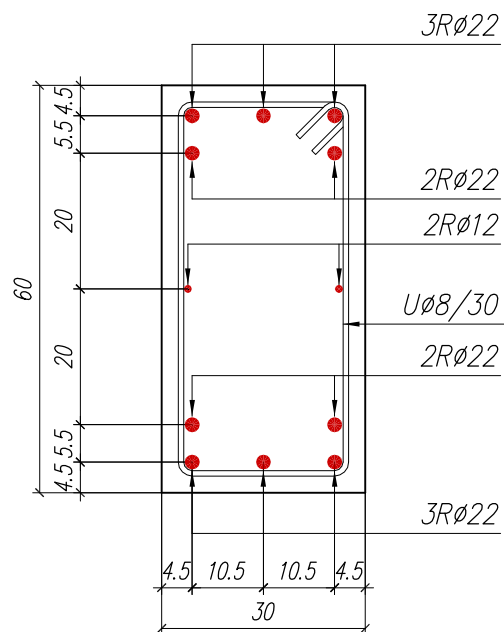
$$M_{abu} = \left(\frac{53}{1.990} \right)^2 \times 0.30 \times 2.05 = 436.3 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_{au} = 796.8 - 436.3 = 360.5 \text{ kNm}$$

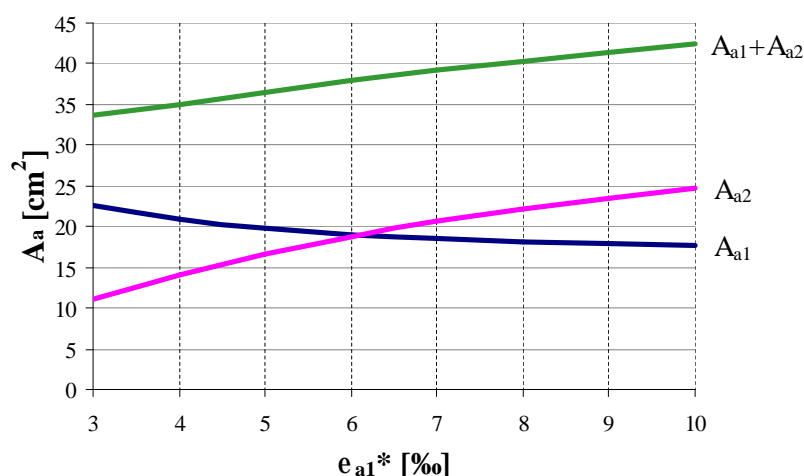
$$\text{pretp. } a_2 = 5 \text{ cm} \Rightarrow A_{a2} = \frac{360.5 \times 10^2}{(53 - 5) \times 40} = 18.78 \text{ cm}^2$$

$$A_{a1} = 29.825 \times \frac{30 \times 53}{100} \times \frac{2.05}{40} - \frac{960}{40} + 18.78 = 19.08 \text{ cm}^2$$

$$\text{usvojeno: } \pm 5 \text{ R}\mathbf{\emptyset 22} (\pm 19.01 \text{ cm}^2)$$



Iz ovog primera, ilustrovanog i dijagramom desno, jasno je da se usvajanjem minimalne propisane dilatacije $\epsilon_{a1}^* = 3\text{‰}$ dobija **MINIMALNA PRITISNUTA I UKUPNA, A MAKSIMALNA ZATEGNUTA ARMATURA** u preseku.



Primer 7. Odrediti potrebnu površinu armature za presek iz Primera 6, ukoliko je vrednost sile pritiska $N_g = 1000 \text{ kN}$.

$$M_u = 1.6 \times 360 = 576 \text{ kNm} ; N_u = 1.6 \times 1000 = 1600 \text{ kN}$$

$$\text{pretp. } a_1 = 7 \text{ cm} \Rightarrow h = 60 - 7 = 53 \text{ cm}$$

$$M_{au} = 576 + 1600 \times \left(\frac{0.60}{2} - 0.07 \right) = 944.0 \text{ kNm}$$

$$k = \frac{53}{\sqrt{\frac{944.0 \times 10^2}{30 \times 2.05}}} = 1.353 \Rightarrow \epsilon_a < 3\text{‰} \Rightarrow \text{dvostruko armiranje}$$

$$\text{usv. } \epsilon_{a1}^* = 3.0\text{‰} \Rightarrow k^* = 1.719 ; \bar{\mu}^* = 43.590\%$$

$$M_{abu} = \left(\frac{53}{1.719} \right)^2 \times 30 \times 2.05 \times 10^{-2} = 584.4 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_{au} = 944.0 - 584.4 = 359.6 \text{ kNm}$$

$$\text{pretp. } a_2 = 7 \text{ cm} \Rightarrow A_{a2} = \frac{359.6 \times 10^2}{(53 - 7) \times 40} = 19.55 \text{ cm}^2$$

$$A_{a1} = 43.590 \times \frac{30 \times 53}{100} \times \frac{2.05}{40} - \frac{1600}{40} + 19.55 = 15.07 \text{ cm}^2$$

Kako je računski potrebna pritisnuta armatura veća od potrebne zategnute armature, a pritom je zadovoljen uslov $A_{a1} \leq A_{a2} \leq 1.5 \cdot A_{a1}$, presek se armira simetrično, srednjom vrednošću sračunatih površina:

$$A_{a1} = A_{a2} = \frac{19.55 + 15.07}{2} = 17.31 \text{ cm}^2$$

usvojeno: $\pm 5 \text{ R}\mathbf{\text{Ø22}}$ ($\pm 19.00 \text{ cm}^2$) - presek kao u primeru 8b.

Ukoliko je:

- (a) $A_{a2} \leq A_{a1}$ - *i zategnuta i pritisnuta zona se armiraju sračunatim površinama armature;*
 - (b) $A_{a1} \leq A_{a2} < 1.5 \cdot A_{a1}$ - *obe zone se armiraju simetrično, srednjom vrednošću sračunatih površina;*
 - (c) $A_{a2} \geq 1.5 \cdot A_{a1}$ - *presek se armira simetrično, ali se potrebna površina armature određuje pomoću **dijagrama interakcije**, o čemu će u nastavku kursa biti reči. Primena dijagrama interakcije je moguća i u slučaju (b).*
-

PRAVOUGAONI PRESEK - SLOŽENO SAVIJANJE

SLOBODNO DIMENZIONISANJE

Poznato: - statički uticaji za pojedina opterećenja (M_i , N_i) - sračunato

- kvalitet materijala (f_B , σ_v) - usvojeno

- širina poprečnog preseka (b) - usvojeno

Nepoznato: - visina poprečnog preseka (d)

- površina armature (A_a)

1. korak: Sračunavaju se granični računski statički uticaji:

$$M_u = \sum_i \gamma_{u,i} \times M_i \quad (i=g, p, \Delta)$$

$$N_u = \sum_i \gamma_{u,i} \times N_i$$

Pri tome se usvajaju MINIMALNE vrednosti koeficijenata sigurnosti, jer se redovno usvaja dilatacija zategnute armature $\epsilon_a \geq 3\text{‰}$.

2. korak: Usvajaju se dilatacije betona ϵ_b i armature ϵ_a , pri čemu bar jedna mora dostići graničnu vrednost. Veće dilatacije betona daju preseke manje visine, armirane većom količinom armature. Za usvojene vrednosti dilatacija iz tabela za dimenzionisanje očitavaju se koeficijenti k i $\bar{\mu}$.

3. korak: Sračunava se potrebna statička visina. Međutim, ovde je postupak iterativan, jer u izrazu za statičku visinu figuriše zasad nepoznata visina d :

$$M_{au} = M_u + N_u \times \left(\frac{d}{2} - a_1 \right) \Rightarrow h = k \sqrt{\frac{M_{au}}{b \times f_B}}$$

Postupak se sprovodi tako što se u prvom koraku pretpostavi $M_{au} = M_u$ i sračuna odgovarajuća statička visina:

$$M_{au}^I = M_u \Rightarrow h^I = k \sqrt{\frac{M_{au}^I}{b \times f_B}}$$

Sa tako određenom visinom se ponavlja proračun sve do postizanja željene tačnosti (razlika d^{i-1} i d^i). Zatim se sračunava potrebna površina armature:

$$A_a = \bar{\mu} \times \frac{b \times h^i}{100} \times \frac{f_B}{\sigma_v} - \frac{N_u}{\sigma_v}$$

4. korak: Usvaja se broj i i prečnik šipki armature. Usvojena armatura se raspoređuje u poprečnom preseku, vodeći računa o zahtevima propisanih Pravilnikom (debljina zaštitnog sloja, čisto rastojanje između šipki).

5. korak: Sračunava se položaj težišta a_1 usvojene armature u odnosu na zategnutu ivicu preseka i potrebna ukupna visina preseka d :

$$d = h + a_1$$

koja se zaokružuje na prvi veći ceo broj (ceo broj deljiv sa pet).

6. korak: Konačno se konstruiše poprečni presek usvojenih dimenzija, armiran usvojenom količinom armature, i prikazuje u odgovarajućoj razmeri (1:10) sa svim potrebnim kotama i oznakama.

Primer 8. Odrediti visinu i potrebnu površinu armature za presek pravougaonog oblika, opterećen zadatim momentima savijanja i silama pritiska. Podaci za proračun:

$$M_g = 60 \text{ kNm} \quad N_g = 125 \text{ kN} \quad b = 25 \text{ cm} \quad \text{MB 30}$$

$$M_p = 80 \text{ kNm} \quad N_p = 100 \text{ kN} \quad \text{GA 240/360}$$

$$M_u = 1.6 \times 60 + 1.8 \times 80 = 240 \text{ kNm}$$

$$N_u = 1.6 \times 125 + 1.8 \times 100 = 380 \text{ kN}$$

$$\text{MB 30} \Rightarrow f_B = 2.05 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \text{GA 240/360} \Rightarrow \sigma_v = 24 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{usvojeno } \varepsilon_b/\varepsilon_a = 3.5/7.0\text{‰} \Rightarrow k = 2.074, \bar{\mu} = 26.984\%$$

I korak: pretp. $M_{au}^I = M_u = 240 \text{ kNm}$

$$h^I = 2.074 \times \sqrt{\frac{240 \times 10^2}{25 \times 2.05}} = 44.9 \text{ cm}$$

$$\text{pretp. } a_1 = 7 \text{ cm} \Rightarrow d^I = 44.9 + 7 = 51.9 \text{ cm}$$

II korak: usv. $d^I = 52 \text{ cm}$

$$M_{au}^{II} = 240.0 + 380.0 \times \left(\frac{0.52}{2} - 0.07 \right) = 312.2 \text{ kNm}$$

$$h^{II} = 2.074 \times \sqrt{\frac{312.2 \times 10^2}{25 \times 2.05}} = 51.2 \text{ cm}$$

$$\text{pretp. } a_1 = 7 \text{ cm} \Rightarrow d^{II} = 51.2 + 7 = 58.2 \text{ cm}$$

III korak: usv. $d^{II} = 60 \text{ cm}$

$$M_{au}^{III} = 240.0 + 380.0 \times \left(\frac{0.60}{2} - 0.07 \right) = 327.4 \text{ kNm}$$

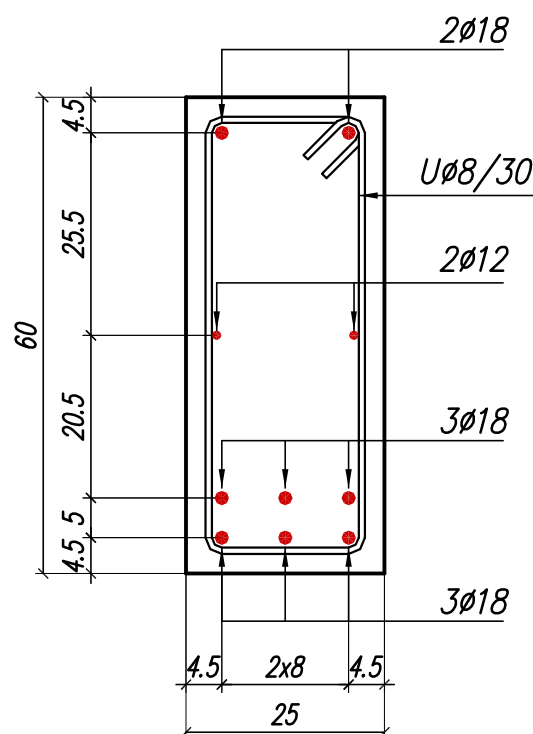
$$h^{III} = 2.074 \times \sqrt{\frac{327.4 \times 10^2}{25 \times 2.05}} = 52.3 \text{ cm}$$

$$\text{pretp. } a_1 = 7 \text{ cm} \Rightarrow d^{III} = 52.3 + 7 = 59.3 \text{ cm} \approx d^{II}$$

$$A_a = 26.984 \times \frac{25 \times 52.3}{100} \times \frac{2.05}{24} - \frac{380}{24} = 14.38 \text{ cm}^2$$

usvojeno: **6Ø18** (15.27 cm²)

$$a_1 = \frac{3 \times (4.5 + 9.5)}{6} = 7.0 \text{ cm} \Rightarrow d = 52.3 + 7.0 = 59.3 \text{ cm} \Rightarrow \text{usvojeno: } \mathbf{d=60 \text{ cm}}$$



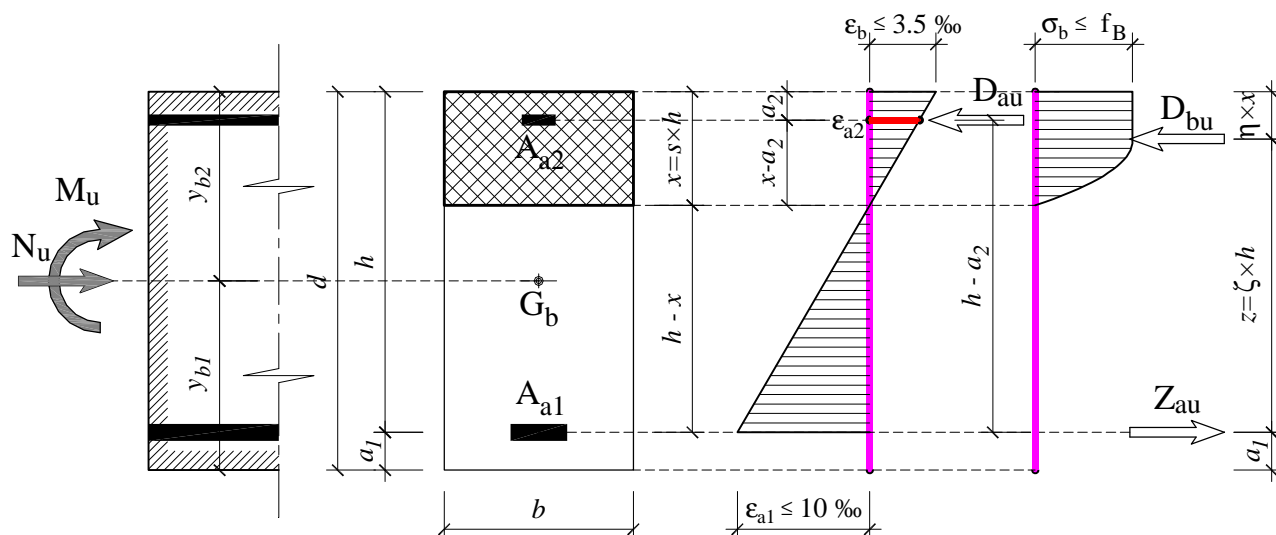
PRAVOUGAONI PRESEK - ODREĐIVANJE MOMENTA LOMA

Uslovi ravnoteže se u opštem slučaju pravougaonog preseka, napregnutog na složeno savijanje, armiranog u obe zone, mogu napisati u sledećem obliku:

$$\sum N = 0: D_{bu} + D_{au} - Z_{au} = N_u$$

$$\sum M_{a1} = 0: D_{bu} \times z + D_{au} \times (h - a_2) = M_{au} = M_u + N_u \times (y_{b2} - a_1)$$

Karakteristične geometrijske veličine potrebne za proračun, dijagrami dilatacija i napona, položaj spoljašnjih i unutrašnjih sila su prikazane na donjoj skici.



Zamenom izraza za unutrašnje sile u betonu i armaturi u uslovu ravnoteže normalnih sila sledi:

$$\sum N = 0: \alpha_b \times s \times b \times h \times f_B + A_{a2} \times \sigma_{a2} - A_{a1} \times \sigma_{a1} - N_u = 0 \quad (1)$$

U poslednjem izrazu poznate su geometrijske veličine i mehaničke karakteristike materijala. Lako je pokazati da su sve ostale nepoznate veličine potpuno određene ukoliko je poznat **položaj neutralne linije**. Naime, iz Bernoulli-eve hipoteze ravnih preseka i uslova loma sledi:

$$s \approx 0.259 = 7/27$$

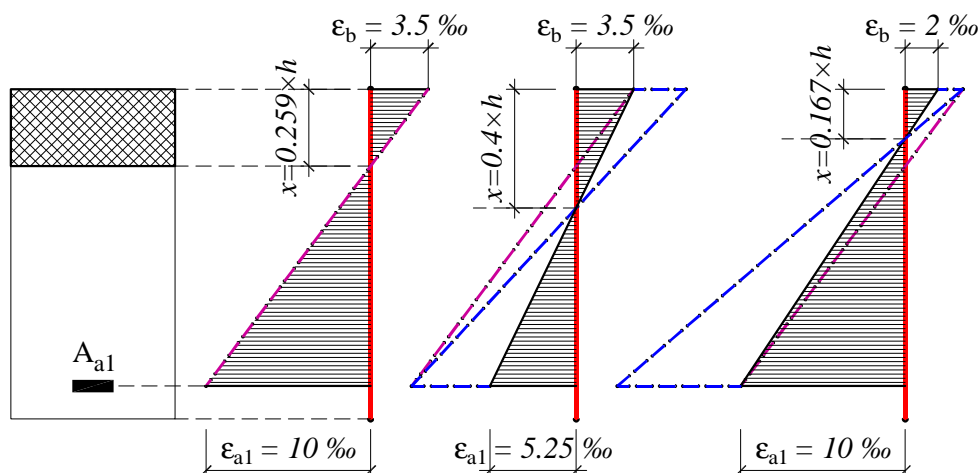
$$\epsilon_b = 3.5\text{‰}$$

$$\epsilon_{a1} = \frac{1-s}{s} \times \epsilon_b$$

$$s \approx 0.259 = 7/27$$

$$\epsilon_{a1} = 10\text{‰}$$

$$\epsilon_b = \frac{s}{1-s} \times \epsilon_{a1}$$



Koeficijent punoće naponskog dijagrama betona zavisi isključivo od dilatacije betona ϵ_b :

$$\alpha_b = \frac{\epsilon_b}{12} \times (6 - \epsilon_b) \quad \text{za } \epsilon_b \leq 2\text{‰} \quad ; \quad \text{odnosno}$$

$$\alpha_b = \frac{3 \times \epsilon_b - 2}{3 \times \epsilon_b} \quad \text{za } 2\text{‰} \leq \epsilon_b \leq 3.5\text{‰}$$

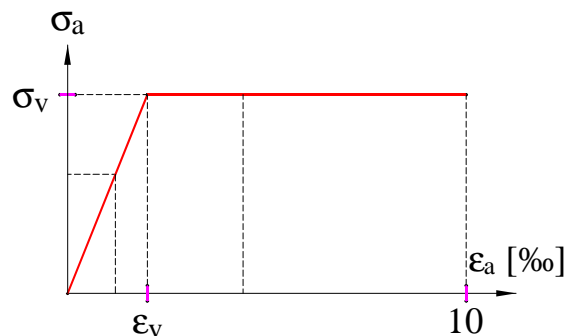
Naponi σ_{a1} i σ_{a2} su određeni iz bilinearnog računskog dijagrama čelika, kao:

$$\sigma_{a1} = E_a \times \epsilon_{a1} \leq \sigma_v \quad ; \quad \sigma_{a2} = E_a \times \epsilon_{a2} \leq \sigma_v$$

pri čemu je:

$$\epsilon_{a2} = \frac{x - a_2}{x} \times \epsilon_b \quad ; \quad \epsilon_v = \frac{\sigma_v}{E_a}$$

Napominje se da je "donja" armatura uvek zategnuta, a "gornja" može biti pritisnuta, ali i zategnuta.



Očito je izborom veličine s kao parametra potpuno određeno stanje unutrašnjih sila u preseku. Naravno, za nasumice izabrano s nije zadovoljen uslov ravnoteže $SN = 0$, pa se postupak određivanja položaja neutralne linije sprovodi iterativno. Za pretpostavljenu vrednost s se sračunaju sve unutrašnje sile i proveri uslov ravnoteže $SN = 0$. Tom prilikom mogu nastupiti tri slučaja:

- uslov ravnoteže (1) je zadovoljen: potpuno neverovatno u prvom koraku
- uslov ravnoteže (1) umesto nule daje pozitivan rezultat: rezultanta unutrašnjih sila je veća od spoljašnje sile pritiska, pa treba pomeriti neutralnu liniju ka pritisnutoj ivici preseka, odnosno smanjiti s
- uslov ravnoteže (1) umesto nule daje negativan rezultat: rezultanta unutrašnjih sila je manja od spoljašnje sile pritiska, pa treba pomeriti neutralnu liniju ka zategnutoj ivici preseka, odnosno povećati s

Postupak se u potpunosti ponavlja dok se ne zadovolji uslov ravnoteže (1), odnosno do postizanja željene tačnosti, npr. max. 1% od veće od sila D_{bu} , Z_{au} .

Kada se iz uslova ravnoteže normalnih sila odredi položaj neutralne linije, iz uslova ravnoteže momenata savijanja se sračunava tražena vrednost momenta nosivosti preseka M_u . Veličina kraka unutrašnjih sila z se određuje iz izraza:

$$z = h - \eta \times x = h \times (1 - \eta \times s)$$

pri čemu se bezdimenzioni koeficijent položaja sile pritiska u betonu određuje iz tabela za dimenzionisanje ili sračunava iz izraza:

$$\eta = \frac{8 - \epsilon_b}{4 \times (6 - \epsilon_b)} \quad \text{za } \epsilon_b \leq 2\text{‰} \quad ; \quad \text{odnosno}$$

$$\eta = \frac{\epsilon_b \times (3\epsilon_b - 4) + 2}{2\epsilon_b \times (3\epsilon_b - 2)} \quad \text{za } 2\text{‰} \leq \epsilon_b \leq 3.5\text{‰}$$

Moment loma preseka M_u se određuje iz uslova ravnoteže momenata u odnosu na težište zategnute armature u preseku, u kome su sve ostale veličine poznate. Sledi:

$$M_u = D_{bu} \times z + D_{au} \times (h - a_2) - N_u \times (y_{b2} - a_1)$$

Sila pritiska se u prethodne izraze unosi sa pozitivnim, a sila zatezanja sa negativnim znakom. Napominje se da je traženi rezultat proračuna veličina M_u , a ne M_{au} .

"JEDNOSTRUKO ARMIRAN"² PRAVOUGAONI PRESEK

U slučaju da se može zanemariti nosivost armature smeštene uz pritisnutu ivicu preseka, moment loma je moguće odrediti:

- napred opisanim postupkom, uvrštavanjem $A_{a2} = 0$ u odgovarajuće izraze, odnosno
- pomoću tabela za dimenzionisanje pravougaonih preseka.

Uslov ravnoteže normalnih sila, tj. izraz za određivanje potrebne površine armature za pravougaoni presek napregnut na složeno savijanje u oblasti velikog ekscentriciteta može se napisati u obliku:

$$A_{a1} = \bar{\mu}_1 \times b \times h \times \frac{f_B}{\sigma_v} - \frac{N_u}{\sigma_v} \quad \Rightarrow \quad \bar{\mu}_1 = \alpha_b \times s = \frac{A_{a1} \times \sigma_v + N_u}{b \times h \times f_B}$$

Kako su poznate geometrijske veličine preseka, količina i položaj armature i mehaničke karakteristike materijala, iz poslednjeg izraza se može sračunati mehanički koeficijent armiranja zategnutom armaturom $\bar{\mu}_1$. Time je jednoznačno određena vrednost koeficijenta k , koja se može se pročitati iz tabela za dimenzionisanje. Nepoznata vrednost momenta loma M_u pri odgovarajućoj sili N_u se računa iz uslova ravnoteže momenata savijanja u odnosu na težište zategnute armature:

$$k = \frac{h}{\sqrt{\frac{M_{au}}{b \times f_B}}} \quad \Rightarrow \quad M_{au} = \left(\frac{h}{k}\right)^2 \times b \times f_B$$

$$M_u = M_{au} - N_u \times (y_{b1} - a_1) = \left(\frac{h}{k}\right)^2 \times b \times f_B - N_u \times \left(\frac{d}{2} - a_1\right)$$

² Pod "*jednostruko armiranim*" presekom u dosadašnjem toku kursa je podrazumevan presek kod koga je proračunski potrebna armatura smeštena samo u zategnutoj zoni preseka. S druge strane, "*dvostruko armirani*" preseki su oni kod kojih je, zbog iscrpljenja nosivosti pritisnutog betona, potrebna računaska pritisnuta armatura.

Kako se ovde radi o proveru nosivosti POZNATOG preseka, svaki presek je zapravo "obostrano" ili "dvostruko" armiran, jer je određena količina armature smeštena i uz pritisnutu ivicu. *Time se nikako ne želi sugerisati da je dilatacija zategnute armature $\epsilon_{a1}=3\text{‰}$, kao u slučaju računskog dvostruko armiranog preseka. Naime:*

- proračun elementa čija se nosivost dokazuje mogao je biti sproveden po regulativi različitoj od aktuelne (npr. proračun sproveden po teoriji dopuštenih napona i sl.);
- računski potrebna i usvojena armatura se razlikuju, što dovodi do odstupanja u odnosu na proračunske vrednosti dilatacija. Takođe, projektant ima slobodu da izabere i drugu granicu ϵ_{a1}^* , veću od 3‰;
- pritisnuta armatura se pojavila kao računski potrebna tokom neke faze građenja i sl.

$$\text{pretp. } s = 0.20 < 0.259 \Rightarrow \varepsilon_{a1} = 10\text{‰} , \varepsilon_b = \frac{0.2}{1-0.2} \times 10 = 2.5\text{‰}$$

$$\alpha_b = \frac{3 \times 2.5 - 2}{3 \times 2.5} = 0.733$$

$$D_{bu} = \alpha_b \times s \times b \times h \times f_B = 0.733 \times 0.20 \times 40 \times 73.44 \times 2.55 = 1098.6 \text{ kN}$$

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma_v}{E_a} = \frac{400}{210 \times 10^{-3}} = 1.905\text{‰}$$

$$\alpha_2 = \frac{a_2}{h} = \frac{4.5}{73.44} = 0.061$$

$$\varepsilon_{a2} = \frac{x - a_2}{x} \times \varepsilon_b = \frac{s - \alpha_2}{s} \times \varepsilon_b = \frac{0.2 - 0.061}{0.2} \times 2.5 = 1.734\text{‰} < \varepsilon_v$$

$$\sigma_{a2} = E_a \times \varepsilon_{a2} = 210 \times 10^3 \times 1.734 \times 10^{-3} = 364.2 \text{ MPa} = 36.42 \text{ kN/cm}^2$$

$$D_{au} = A_{a2} \times \sigma_{a2} = 9.82 \times 36.42 = 357.5 \text{ kN}$$

$$\varepsilon_{a1} = 10\text{‰} > \varepsilon_v \Rightarrow \sigma_{a1} = \sigma_v = 400 \text{ MPa} = 40 \text{ kN/cm}^2$$

$$Z_{au} = A_{a1} \times \sigma_{a1} = 39.27 \times 40 = 1570.8 \text{ kN}$$

$$\sum N = D_{bu} + D_{au} - Z_{au} - N_u = 1098.6 + 357.5 - 1570.8 - 0 = -114.7 \text{ kN}$$

Kako uslov ravnoteže nije zadovoljen, proračun se ponavlja sa korigovanom vrednošću bezdimenzi-onog koeficijenta **s**. S obzirom da unutrašnja sila zatezanja premašuje silu pritiska, potrebno je povećati pritisnutu površinu betona, odnosno povećati **s**:

$$0.2 < s < 0.259$$

$$\text{pretp. } s = 0.22 < 0.259 \Rightarrow \varepsilon_{a1} = 10\text{‰} , \varepsilon_b = \frac{0.22}{1-0.22} \times 10 = 2.821\text{‰}$$

$$\alpha_b = \frac{3 \times 2.821 - 2}{3 \times 2.821} = 0.764 \Rightarrow D_{bu} = 0.764 \times 0.22 \times 40 \times 73.44 \times 2.55 = 1258.4 \text{ kN}$$

$$\varepsilon_{a2} = \frac{0.22 - 0.061}{0.22} \times 2.821 = 2.035\text{‰} > \varepsilon_v \Rightarrow \sigma_{a2} = \sigma_v = 40 \text{ kN/cm}^2$$

$$D_{au} = 9.82 \times 40 = 392.7 \text{ kN}$$

$$\varepsilon_{a1} = 10\text{‰} > \varepsilon_v \Rightarrow \sigma_{a1} = \sigma_v = 400 \text{ MPa} = 40 \text{ kN/cm}^2$$

$$Z_{au} = 39.27 \times 40 = 1570.8 \text{ kN}$$

$$\sum N = D_{bu} + D_{au} - Z_{au} - N_u = 1258.4 + 392.7 - 1570.8 - 0 = 80.3 \text{ kN}$$

Kako uslov ravnoteže ponovo nije zadovoljen, proračun se nastavlja. Kako sada unutrašnja sila pritiska premašuje silu zatezanja, potrebno je smanjiti **s**:

$$0.2 < s < 0.22$$

$$\text{pretp. } s = 0.21 < 0.259 \Rightarrow \epsilon_{a1} = 10\text{‰} , \epsilon_b = \frac{0.21}{1-0.21} \times 10 = 2.664\text{‰}$$

$$\alpha_b = \frac{3 \times 2.664 - 2}{3 \times 2.664} = 0.750 \Rightarrow D_{bu} = 0.75 \times 0.21 \times 40 \times 73.44 \times 2.55 = 1181.5 \text{ kN}$$

$$\epsilon_{a2} = \frac{0.21 - 0.061}{0.21} \times 2.664 = 1.888\text{‰} < \epsilon_v$$

$$\sigma_{a2} = 210 \times 10^3 \times 1.888 \times 10^{-3} = 396.5 \text{ MPa} = 39.65 \text{ kN/cm}^2$$

$$D_{au} = 9.82 \times 39.65 = 389.3 \text{ kN}$$

$$\epsilon_{a1} = 10\text{‰} > \epsilon_v \Rightarrow \sigma_{a1} = \sigma_v = 400 \text{ MPa} = 40 \text{ kN/cm}^2$$

$$Z_{au} = 39.27 \times 40 = 1570.8 \text{ kN}$$

$$\sum N = D_{bu} + D_{au} - Z_{au} - N_u = 1181.5 + 389.3 - 1570.8 - 0 = 0 \Rightarrow s = 0.21$$

Kako je uslov ravnoteže zadovoljen, sračunava se položaj sile pritiska u betonu, a zatim i traženi moment nosivosti preseka. Sledi:

$$\eta = \frac{\epsilon_b \times (3\epsilon_b - 4) + 2}{2\epsilon_b \times (3\epsilon_b - 2)} = \frac{2.664 \times (3 \times 2.664 - 4) + 2}{2 \times 2.664 \times (3 \times 2.664 - 2)} = 0.396^3$$

$$z = h \times (1 - \eta \times s) = 73.44 \times (1 - 0.396 \times 0.21) = 67.32 \text{ cm}$$

$$M_u = D_{bu} \times z + D_{au} \times (h - a_2) - N_u \times (y_{b2} - a_1)$$

$$M_u = 1181.5 \times 67.32 + 389.3 \times (73.44 - 4.5) - 0 = 106380 \text{ kNcm}$$

$$M_u = 1063.8 \text{ kNm}$$

U odnosu na vrednost sračunatu u Primeru 9, razlika momenta nosivosti iznosi:

$$\Delta = \frac{1063.8 - 1030.1}{1030.1} \times 100\% = 3.27\%$$

što predstavlja doprinos pritisnute armature u preseku.

³ Naravno, koeficijenti α_b i η se mogu, za odgovarajuću dilataciju ϵ_b , pročitati iz tablica za dimenzionisanje pravougaonih preseka.

Primer 11. Odrediti moment nosivosti preseka iz Primera 9, ukoliko je, pored momenta savijanja, opterećen i graničnom računskom silom pritiska $N_u = 800$ kN. Proračun sprovesti u dve varijante: zanemarujući, odnosno uzimajući u obzir, nosivost armature smeštene uz pritisnutu ivicu preseka.

a. bez udela pritisnute armature

$$\bar{\mu}_1 = \frac{A_{a1} \times \sigma_v + N_u}{b \times h \times f_B} = \frac{39.27 \times 40 + 800}{40 \times 73.44 \times 2.55} = 0.3165 = 31.65\% \Rightarrow k = 1.942$$

$$\epsilon_b = 3.5\text{‰} ; \alpha_b = 0.810 ; \eta = 0.416$$

ϵ_a	s	ζ	$\mu_{1M} \%$	k
5.5	0.389	0.838	31.481	1.947
5.45	0.391	0.837	31.657	1.942
5.4	0.393	0.836	31.835	1.938

$$M_u = \left(\frac{h}{k} \right)^2 \times b \times f_B - N_u \times y_{a1} = \left(\frac{73.44}{1.942} \right)^2 \times 40 \times 2.55 - 800 \times \left(\frac{80}{2} - 6.56 \right) = 119070 \text{ kNcm}$$

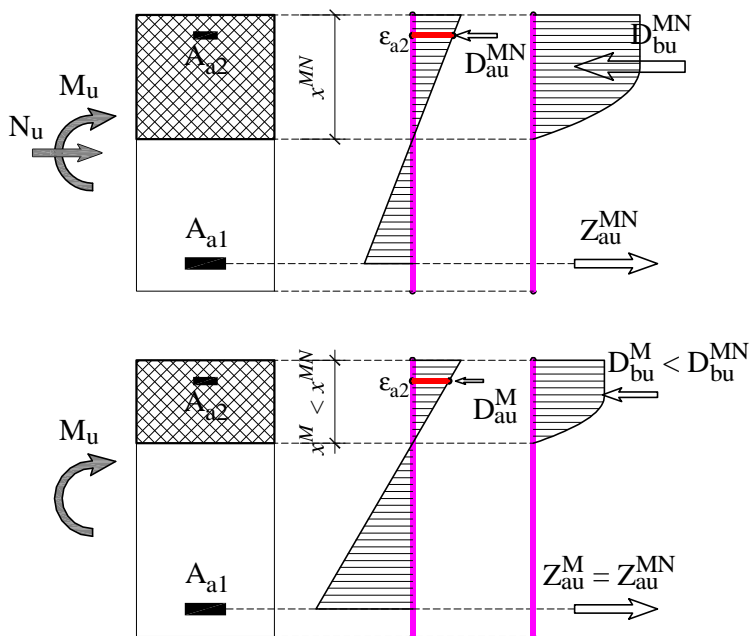
$$M_u = 1190.7 \text{ kNm}$$

b. sa udelom pritisnute armature

Vezano za sračunate vrednosti u Primerima 9, 10 i 11a treba приметiti sledeće:

- koeficijent položaja neutralne linije će svakako biti $s < \mathbf{0.391}$ (vrednost sračunata u primeru 11a, uz zanemarenje nosivosti pritisnute armature)⁴;

- koeficijent položaja neutralne linije će svakako biti $s > \mathbf{0.210}$ (vrednost sračunata u primeru 10, uzimajući u obzir nosivost pritisnute armature, za presek napregnut na čisto savijanje). U oba primera se razmatra isti presek, pa je površina zategnute armature ista. Kako je napon u zategnutoj armaturi $\sigma_{a1} = \sigma_v$, sile u zategnutoj armaturi u oba primera su jednake. Povećanje spoljašnje sile pritiska (sa $N=0$ na N_u) u uslovu ravnoteže normalnih sila $\sum N = D_{bu} + D_{au} - Z_{au} = N_u$ moguće je jedino povećanjem pritisnute površine betona, odnosno $s^{MN} > s^M$.



⁴ Objašnjenje je istovetno kao u Primeru 10

$$\text{pretp. } s = 0.3 > 0.259 \Rightarrow \varepsilon_b = 3.5\text{‰} , \varepsilon_{a1} = \frac{1-0.3}{0.3} \times 3.5 = 8.17\text{‰}$$

$$\alpha_b = \frac{3 \times 3.5 - 2}{3 \times 3.5} = 0.810 \Rightarrow D_{bu} = 0.810 \times 0.3 \times 40 \times 73.44 \times 2.55 = 1819.2 \text{ kN}$$

$$\varepsilon_{a2} = \frac{0.3 - 0.061}{0.3} \times 3.5 = 2.785\text{‰} > \varepsilon_v \Rightarrow \sigma_{a2} = \sigma_v = 40 \text{ kN/cm}^2$$

$$D_{au} = 9.82 \times 40 = 392.7 \text{ kN}$$

$$\varepsilon_{a1} = 8.17\text{‰} > \varepsilon_v \Rightarrow \sigma_{a1} = \sigma_v = 400 \text{ MPa} = 40 \text{ kN/cm}^2$$

$$Z_{au} = 39.27 \times 40 = 1570.8 \text{ kN}$$

$$\sum N = D_{bu} + D_{au} - Z_{au} - N_u = 1819.2 + 392.7 - 1570.8 - 800 = -158.9 \text{ kN}$$

Kako uslov ravnoteže nije zadovoljen, proračun se ponavlja sa korigovanom vrednošću bezdimenzi-onog koeficijenta **s**. Potrebno je povećati pritisnutu površinu betona, odnosno povećati **s**:

$$0.3 < s < 0.391$$

Treba uočiti da daljim povećanjem vrednosti **s** dilatacija ε_{a2} raste i ostaje veća od ε_v , tako da su obe armature dostigle granicu tečenja⁵ a sile D_{au} i Z_{au} ostaju konstantne. Dalje, dilatacija betona ostaje maksimalnih $\varepsilon_b = 3.5\text{‰}$, pa koeficijent punoće naponskog dijagrama betona zadržava vrednost $\alpha_b = 0.81$. Sledi da je jedina nepoznata u uslovu ravnoteže **s**, pa se direktno može odrediti:

$$D_{bu} = N_u + Z_{au} - D_{au} = 800 + 1570.8 - 392.7 = 1978.1 \text{ kN}$$

$$s = \frac{D_{bu}}{\alpha_b \times b \times h \times f_B} = \frac{1978.1}{0.810 \times 40 \times 73.44 \times 2.55} = 0.326$$

Sprovodi se kontrola naprezanja zategnute armature:

$$\varepsilon_{a1} = \frac{1-0.326}{0.326} \times 3.5 = 7.229\text{‰} > \varepsilon_v \Rightarrow \sigma_{a1} = \sigma_v$$

Kako je učinjena pretpostavka o veličini naprezanja armature potvrđena, sračunava se položaj sile D_{bu} , a zatim i traženi moment nosivosti preseka. Sledi:

$$\eta = \frac{3.5 \times (3 \times 3.5 - 4) + 2}{2 \times 3.5 \times (3 \times 3.5 - 2)} = 0.416^6$$

$$z = 73.44 \times (1 - 0.416 \times 0.326) = 63.47 \text{ cm}$$

⁵ Za pritisnutu armaturu to je u primeru pokazano, a za zategnutu osnovano pretpostavljeno i proverava se po sračunavanju položaja neutralne linije.

⁶ Koeficijenti α_b i η se mogu, za odgovarajuće ε_b , pročitati iz tablica za dimenzionisanje pravougaonih preseka.

$$M_u = D_{bu} \times z + D_{au} \times (h - a_2) - N_u \times (y_{b2} - a_1)$$

$$M_u = 1978.1 \times 63.47 + 392.7 \times (73.44 - 4.5) - 800 \times \left(\frac{80}{2} - 6.56 \right) = 125880 \text{ kNcm}$$

$$M_u = 1258.8 \text{ kNm}$$

U odnosu na vrednost sračunatu u Primeru 11a, razlika momenta nosivosti iznosi:

$$\Delta = \frac{1258.8 - 1190.7}{1190.7} \times 100\% = 5.72\%$$

što predstavlja doprinos pritisnute armature u preseku. U ovom slučaju doprinos pritisnute armature je veći nego u slučaju čistog savijanja, jer je naprezanje pritisnute armature veće.

Naravno, što je količina pritisnute armature u preseku veća, i njen doprinos nosivosti je veći, ali čak i u slučaju simetrično armiranih preseka opterećenih znatnim silama pritiska ne prelazi 10%. Na nosivost preseka prvenstveno utiče količina ZATEGNUTE armature⁷, dok pritisnuta armatura donekle smanjuje naprezanje betona, ali moment nosivosti povećava maksimalno do 10%.

Primer 12. Odrediti moment nosivosti preseka iz Primera 9, ukoliko je, pored momenta savijanja, opterećen i graničnom računskom silom zatezanja $Z_u = 400 \text{ kN}$. Proračun sprovesti u dve varijante: zanemarujući, odnosno uzimajući u obzir, nosivost armature smeštene uz pritisnutu ivicu preseka.

a. bez udela pritisnute armature

$$\bar{\mu}_1 = \frac{A_{a1} \times \sigma_v + N_u}{b \times h \times f_B} = \frac{39.27 \times 40 + (-400)}{40 \times 73.44 \times 2.55} = 0.1563 = 15.63\% \Rightarrow k = 2.637$$

ε_b	s	α_b	η	ζ	$\mu_{1M} \%$	k
2.675	0.211	0.751	0.396	0.916	15.845	2.624
2.65	0.209	0.748	0.395	0.917	15.679	2.637
2.625	0.208	0.746	0.395	0.918	15.512	2.650

$$M_u = \left(\frac{h}{k} \right)^2 \times b \times f_B - N_u \times y_{a1} = \left(\frac{73.44}{2.637} \right)^2 \times 40 \times 2.55 - (-400) \times \left(\frac{80}{2} - 6.56 \right) = 92478 \text{ kNcm}$$

$$M_u = 924.78 \text{ kNm}$$

⁷ Ukoliko bi u razmotreni presek dodali dve šipke u pritisnutu, odnosno zategnutu zonu, dobili bi sledeće rezultate:

8Ø25+4Ø25:	$\varepsilon_b/\varepsilon_a = 3.5/9.89\%$;	$M_u = 1311.6 \text{ kNm (+4.2\%)}$
10Ø25+2Ø25:	$\varepsilon_b/\varepsilon_a = 3.5/5.37\%$;	$M_u = 1447.6 \text{ kNm (+15.0\%)}$

b. sa udelom pritisnute armature

Potpuno analogno razmatranju sprovedenom u primeru 11b, sledi:

- koeficijent položaja neutralne linije će svakako biti $s < \mathbf{0.209}$ (vrednost sračunata u primeru 12a, uz zanemarenje nosivosti pritisnute armature);
- koeficijent položaja neutralne linije će svakako biti $s < \mathbf{0.210}$ (vrednost sračunata u primeru 10, uzimajući u obzir nosivost pritisnute armature, za presek napregnut na čisto savijanje). U oba primera se razmatra isti presek, pa je površina zategnute armature ista. Kako je napon u zategnutoj armaturi $\sigma_{a1} = \sigma_v$, sile u zategnutoj armaturi u oba primera su jednake. Povećanje spoljašnje sile zatezanja (sa $N=0$ na Z_u) u uslovu ravnoteže normalnih sila $\sum N = D_{bu} + D_{au} - Z_{au} = N_u$ moguće je jedino smanjenjem pritisnute površine betona, odnosno $s^{MZ} < s^M$.

$$\text{pretp. } s = \mathbf{0.20} < 0.259 \Rightarrow \epsilon_{a1} = 10\text{‰} , \epsilon_b = \frac{0.2}{1-0.2} \times 10 = 2.5\text{‰}$$

$$\alpha_b = \frac{3 \times 2.5 - 2}{3 \times 2.5} = 0.733$$

$$D_{bu} = \alpha_b \times s \times b \times h \times f_B = 0.733 \times 0.20 \times 40 \times 73.44 \times 2.55 = \mathbf{1098.6 \text{ kN}}$$

$$\epsilon_{a2} = \frac{0.2 - 0.061}{0.2} \times 2.5 = 1.734\text{‰} < \epsilon_v$$

$$\sigma_{a2} = E_a \times \epsilon_{a2} = 210 \times 10^3 \times 1.734 \times 10^{-3} = 364.2 \text{ MPa} = 36.42 \text{ kN/cm}^2$$

$$D_{au} = A_{a2} \times \sigma_{a2} = 9.82 \times 36.42 = \mathbf{357.5 \text{ kN}}$$

$$\epsilon_{a1} = 10\text{‰} > \epsilon_v \Rightarrow \sigma_{a1} = \sigma_v = 400 \text{ MPa} = 40 \text{ kN/cm}^2$$

$$Z_{au} = A_{a1} \times \sigma_{a1} = 39.27 \times 40 = \mathbf{1570.8 \text{ kN}}$$

$$\sum N = D_{bu} + D_{au} - Z_{au} - N_u = 1098.6 + 357.5 - 1570.8 - (-400) = 285.3 \text{ kN}$$

Kako uslov ravnoteže nije zadovoljen, proračun se ponavlja sa korigovanom vrednošću s , na način prikazan u prethodnim primerima. Rezultati daljeg proračuna prikazani su tabelarno:

s	ϵ_{b1}	ϵ_{a1}	α_b	D_{bu}	ϵ_{a2}	σ_{a2}	D_{au}	σ_{a1}	Z_{au}	$\sum N_u$
(-)	(‰)	(‰)	(-)	(kN)	(‰)	(MPa)	(kN)	(MPa)	(kN)	(kN)
0.160	1.905	10	0.650	779.1	1.175	246.8	242.3	400	1570.8	-149.4
0.175	2.121	10	0.686	898.9	1.378	289.5	284.2	400	1570.8	12.3
0.174	2.105	10	0.683	889.8	1.363	286.2	281.0	400	1570.8	0.00

$$\eta = \frac{2.105 \times (3 \times 2.105 - 4) + 2}{2 \times 2.105 \times (3 \times 2.105 - 2)} = 0.378$$

$$z = 73.44 \times (1 - 0.378 \times 0.174) = 68.61 \text{ cm}$$

$$M_u = D_{bu} \times z + D_{au} \times (h - a_2) - N_u \times (y_{b2} - a_1)$$

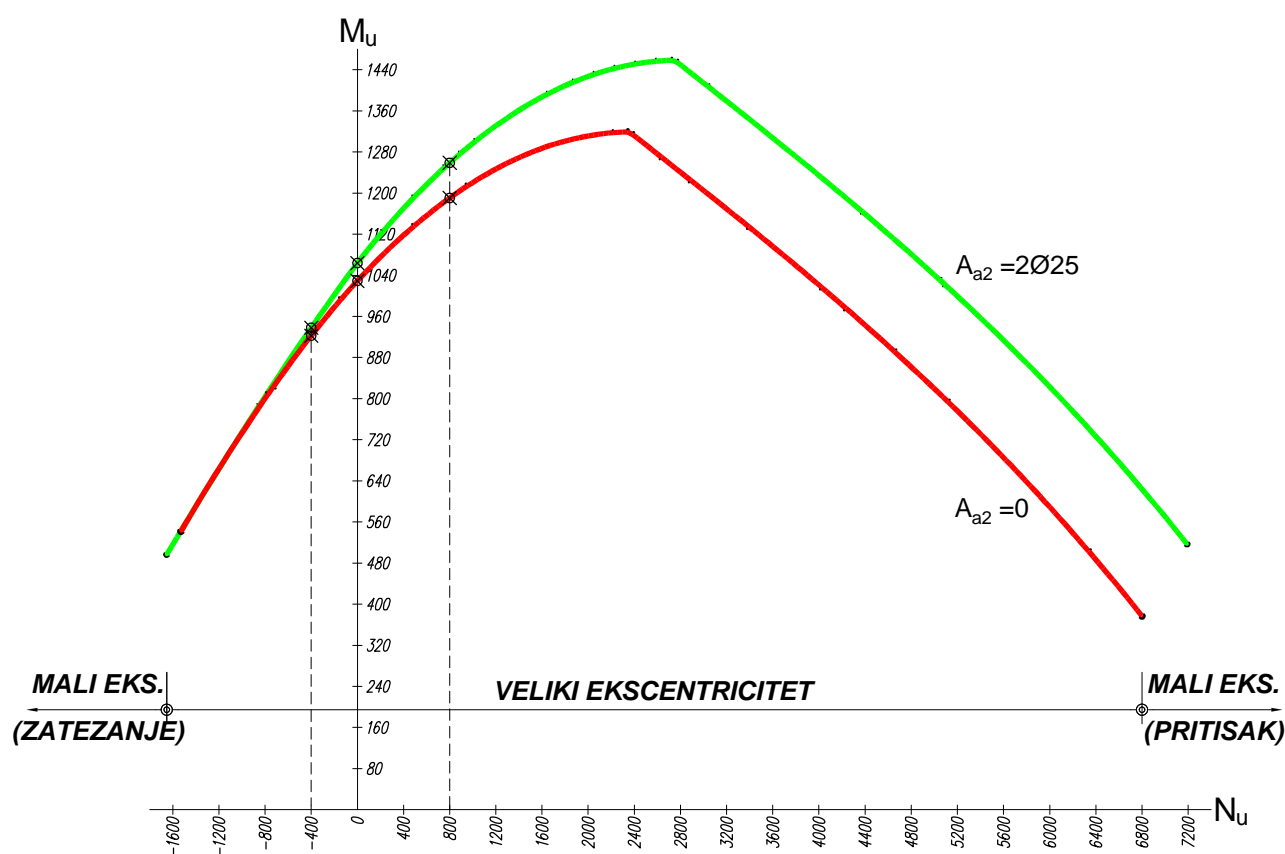
$$M_u = 889.8 \times 68.61 + 281.0 \times (73.44 - 4.5) - (-400) \times \left(\frac{80}{2} - 6.56 \right) = 93790 \text{ kNcm}$$

$$M_u = 937.9 \text{ kNm}$$

U odnosu na vrednost sračunatu u Primeru 12a, razlika momenta nosivosti iznosi:

$$\Delta = \frac{937.9 - 924.78}{924.78} \times 100\% = 1.42\%$$

što predstavlja doprinos pritisnute armature u preseku. U ovom slučaju doprinos pritisnute armature je manji nego u slučaju čistog savijanja, jer je naprezanje pritisnute armature vrlo malo⁸.



⁸ U pojedinim, izuzetnim, slučajevima se može dobiti veća računaska nosivost »jednostruko« nego »obostrano« armiranog preseka. Radi se o elementima opterećenim velikim silama zatezanja, kada je neutralna linija jako visoko u poprečnom preseku. Na primer, ukoliko na razmatrani presek deluje sila zatezanja $Z_u = 1200 \text{ kN}$, sledi:

8Ø25:	$\epsilon_b/\epsilon_a = 1.173/10\text{‰}$;	$M_u = 663.4 \text{ kNm}$
8Ø25+2Ø25:	$\epsilon_b/\epsilon_a = 1.029/10\text{‰}$;	$M_u = 663.1 \text{ kNm}$

Dakle, iako se neutralna linija pomerila ka pritisnutoj ivici preseka, zbirni moment sila D_{bu} i D_{au} je manji nego u slučaju kada je nosivost pritisnute armature zanemarena. Ovi primeri su u praksi veoma retki, jer odredbe pojedinih propisa ograničavaju položaj neutralne linije (npr. $x \geq 2a_2$, što u prikazanom primeru nije zadovoljeno).